УДК 531.36 https://doi.org/10.15407/itm2024.04.103

І. А. КОСТЮШКО[1], Ю. М. БАЗИЛЕВИЧ[2]

ПАРАДОКС ЦИГЛЕРА В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ В'ЯЗКОПРУЖНИХ СИСТЕМ

[1]Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
пр. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: kostushkoia5@gmail.com
[2]Український державний університет науки і технологій,
вул. Лазаряна, 2, 49000, Дніпро, Україна; e-mail: bazilvch@ukr.net

Робота присвячена дослідженню стійкості руху в'язкопружного стрижня, матеріал якого підпорядкований закону Кельвіна–Фойгта. Наводяться розв'язки двох задач щодо визначення стійкості прямолінійної форми тонкого однорідного стрижня. В задачі I стрижень защемлений одним кінцем. До іншого прикладена сила, що стежить, яка має властивість, що при вигині стрижня завжди напрямлена по дотичній до лінії стрижня. Така сила може бути реалізованою, наприклад, шляхом встановлення на кінці стрижня порохового ракетного двигуна. В задачі II стрижень здійснює рівноприскорений рух під дією сили, що стежить. Дану задачу можна розглядати як спрощену модель ракети, яка рухається під дією реактивної сили.

В математичному сенсі задача зводиться до розгляду диференціального рівняння в частинних похідних п'ятого порядку із заданими граничними умовами на кінцях стрижня. Розв'язок задачі представлено у вигляді ряду за балочними функціями. Для визначення критичного навантаження застосовано критерій Раусса–Гурвіца. Наводиться обгрунтування кількості доданків даного розкладу. Отримано залежність величини критичного навантаження від коефіцієнта внутрішньої в'язкості. Підтверджено парадокс дестабілізації: існування будь-якого нескінченно малого коефіцієнта в'язкості суттєво знижує значення критичного навантаження у порівнянні з пружною моделлю. Наводиться залежність критичної сили від значення коефіцієнта внутрішньої в'язкості.

Для підтвердження отриманих аналітичних результатів наводиться чисельний розв'язок відповідної задачі Коші методом Рунге–Кутта 8 порядку. Відповідність чисельних та аналітичних результатів свідчать про вірогідність останніх.

Практичне застосування досліджень у галузі стійкості руху в'язкопружних стрижнів є надзвичайно широким, оскільки в'язкопружні стрижні – базовий елемент різноманітних інженерних конструкцій. Визначення критичного навантаження дозволяє забезпечити надійність та ефективність конструкції.

***Ключові слова**: модель Кельвіна–Фойгта, критична сила, критичне навантаження, коефіцієнт в'язкості, стійкість, балочні функції, матриця Гурвіца, критерій Раусса–Гурвіца.*

This work is devoted to the study of the motion stability of a viscoelastic rod whose material obeys the Kelvin–Voigt law. Solutions to two problems of determining the rectilinear shape stability of a thin homogeneous rod are given. In problem I, the rod is restrained at one end, and a tracking force is applied to the other end such that it is always tangent to the rod line when the rod is bent. Such a force can be realized, for example, by installing a gunpowder rocket engine at the end of the rod. In problem II, the rod executes a uniformly accelerated motion under the action of a tracking force. This problem can be considered as a simplified model of a rocket moved by a reactive force.

Mathematically, the problem reduces to a partial differential equation of the fifth order with specified boundary conditions at the rod ends. The solution of the problem is presented as a series expansion in beam functions. To determine the critical load, the Rouss–Hurwitz criterion is applied. The number of expansion terms is justified. The critical load is found as a function of the internal viscosity coefficient. The paradox of destabilization is confirmed: any infinitesimal viscosity coefficient significantly reduces the critical load as compared to the elastic model. The critical force is found as a function of the internal viscosity coefficient is given.

To confirm the obtained analytical results, a numerical solution of the corresponding Cauchy problem using the Runge–Kutta method of the 8th order is given. An agreement between the numerical and the analytical results indicates the validity of the latter.

The practical application of research in the field of the motion stability of viscoelastic rods is extremely wide because viscoelastic rods are the basic element of various engineering structures. Determining the critical load allows one to ensure their reliability and efficiency.

***Keywords**: Kelvin–Voigt model, critical force, critical load, viscosity coefficient, stability, beam functions, Hurwitz matrix, Rauss–Hurwitz criterion.*

Вступ. Стійкість неконсервативно навантажених пружних та непружних конструкцій та їх елементів є класичним розділом механіки деформівного твердого тіла, що викликає зацікавленість на протязі останнього століття. Наразі з'являється можливість більш точного аналізу нових якісних ефектів

© І. А. Костюшко, Ю. М. Базилевич, 2025

поведінки механічних систем під дією неконсервативних навантажень у зв'язку із швидким розвитком методів обчислень та їх застосуванні в програмних забезпеченнях. Наведена робота присвячена дослідженню стійкості стрижня із фойгтовою внутрішньою в'язкістю.

Метою дослідження є визначення критичного навантаження, що відповідає втраті стійкості прямолінійної форми стрижня із врахуванням в'язкості матеріалу, та подальше порівняння результатів із моделлю пружного стрижня.

Постановка задач. Розглядається тонкий в'язкопружній стрижень довжиною l. Вважаємо, що матеріал стрижня відповідає моделі Кельвіна–Фойгта:

$$\sigma = E(\varepsilon + \nu\,\dot{\varepsilon}),$$

де σ – напруження; ε – деформація; ν – час релаксації; E – модуль пружності; точка над символом означає похідну за часом t.
Досліджується стійкість прямолінійної форми стрижня у таких задачах.

Задача I. Стрижень закріплений одним кінцем. До іншого прикладена сила P, що стежить (рис. 1).

Задача II. Стрижень здійснює рівноприскорений рух під дією сили P, що стежить (рис. 2).

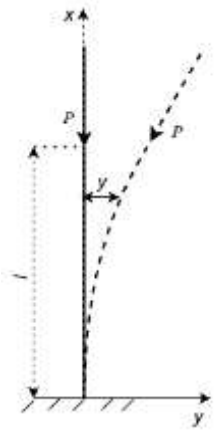


Рис. 1 – Задача I

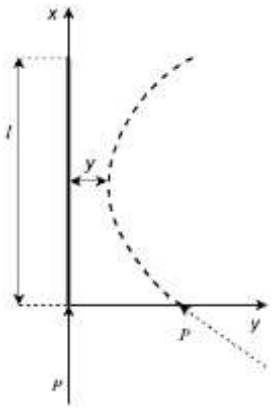


Рис. 2 – Задача II

Математична постановка задачі I

Розглядається стрижень, защемлений на одному кінці. На другій кінець діє стала за величиною сила P, що стежить (рис. 1). Початкова форма рівноваги буде стійкою лише до деякого значення сили P^*. При силі, що перевищує це значення, яке ми називаємо критичним, відбувається відхилення від початкового положення рівноваги.

Для розв'язання задачі про визначення критичного навантаження спершу складемо рівняння руху в'язкопружного стрижня.

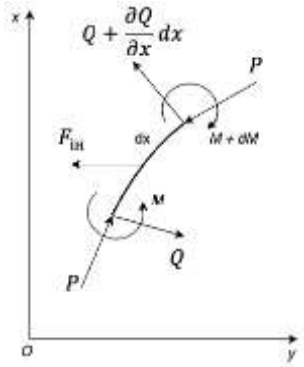


Рис. 3 – Задача I

До елементу стрижня довжиною dx (рис. 3) прикладені сили, моменти в перетинах, розподілені інерційні сили $F_{\text{ін.}} = \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$, де ρ – густина матеріалу стрижня; S – площа перетину стрижня; M – момент, Q – поперечна сила.

Проєктуючи сили на нормаль до пружної лінії, отримуємо:

$$dQ + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = 0.$$

Оскільки $Q = EI\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^4 y}{\partial x^3\, \partial t}\right)$, то останнє рівняння приймає вигляд:

$$EI\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t}\right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

де EI – жорсткість перетину при вигині; величину ρS вважаємо сталою.

Граничні умови, що відповідають умовам защемлення кінця $x = 0$ та рівності нулеві проєкцій на вісь y згинальних моментів та сил, що перерізують при $x = l$, мають вид:

$$y|_{x=0} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \ \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Математична постановка задачі II. Рівняння руху стрижня, що рухається під дією сили P, що стежить, отримується аналогічним до попередньої задачі чином.

Розглядається елемент стрижня довжиною dx (рис. 4), де

$$P' = P\frac{dx}{l}; N = P\frac{l-x}{l};$$

$$N + dN = P\frac{l - x - dx}{l}.$$

Прирівнюючи нулеві суму проєкцій на вісь y, отримуємо:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[P\frac{l-x}{l}\frac{\partial y}{\partial x}\right] = 0.$$

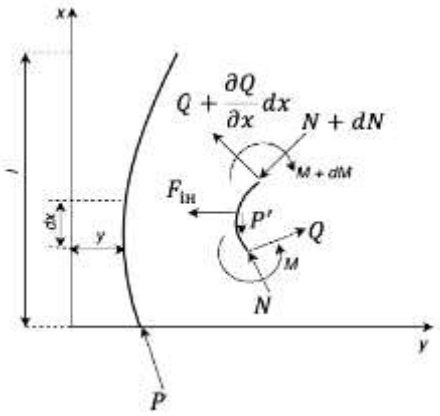


Рис. 4 – Задача II. Елемент стрижня

Із врахуванням: $Q = EI\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^4 y}{\partial x^3\, \partial t}\right)$, отримуємо остаточний вид рівняння руху стрижня:

$$EI\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t}\right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{P}{l}\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = 0. \quad (3)$$

Граничні умови, що відповідають рівності нулеві проєкцій на вісь y згинальних моментів та перерізуючих сил на кінцях стрижня, мають вид:

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=0} = 0; \ \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

В задачах (1), (2) та (3), (4) робимо перехід $(\mathrm{y}, x, t) \to (\mathrm{W}, \xi, \tau)$ за формулами:

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{y}}{l};\ \xi = \frac{x}{l};\ \tau = t\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}.$$

В результаті математична постановка задачі I – формули (1), (2) – в безрозмірних величинах (W, ξ, τ) приймає вид:

$$\frac{\partial^4 \mathrm{W}}{\partial \xi^4} + k\frac{\partial^5 \mathrm{W}}{\partial \xi^4\,\partial \tau} + p\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \tau^2} = 0, \tag{5}$$

$$\mathrm{W}|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0;\ \left.\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=1} = \left.\frac{\partial^3 \mathrm{W}}{\partial \xi^3}\right|_{\xi=1} = 0. \tag{6}$$

Формули (3),(4) – задача II – перетворюються на такі:

$$\frac{\partial^4 \mathrm{W}}{\partial \xi^4} + k\frac{\partial^5 \mathrm{W}}{\partial \xi^4\,\partial \tau} - p\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \xi} + p(1-\xi)\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \tau^2} = 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial^3 \mathrm{W}}{\partial \xi^3}\right|_{\xi=0} = 0;\ \left.\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=1} = \left.\frac{\partial^3 \mathrm{W}}{\partial \xi^3}\right|_{\xi=1} = 0. \tag{8}$$

В (5) – (8) позначено $p = \frac{Pl^2}{EI};\ k = \nu\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}\frac{1}{l^2};\ 0 \le \xi \le 1.$

В наведених постановках задач I, II величини k і p – параметри задач. Значенню $k = 0$ відповідає класичний випадок пружного стрижня.

Огляд літератури. При $k = 0$ задачі (5), (6) та (7), (8) розглянуті в роботах [1, 2]. В цьому випадку задача I є класичною задачею про малі коливання пружного стрижня із сталою згинальною жорсткістю, що защемлений на одному кінці, а на інший діє сила, що стежить. При значеннях навантаження, що лежить в інтервалі $0 < p < 20{,}05$, має місце коливальний режим із сталою амплітудою. Критичне значення $p^* \approx 20{,}05$ відповідає появі коливальної нестійкості (флаттера) прямолінійної рівноваги [1]. В роботі [2] наводиться $p^* \approx 109{,}99$ для випадку пружного стрижня в задачі II.

Відзначимо роботу [3], де досліджено вплив розподілення мас по довжині пружного стрижня на значення p^*. Частина маси зосереджена в точці $x = 1$, інша – рівномірно розподілена по довжині. Граничний випадок невагомого стрижня із зосередженою масою на кінці носить назву стойки Бека. Для цього випадку величина p^* співпадає із найменшим додатним коренем рівняння $tg\sqrt{p} = \sqrt{p}$, тобто $p^* \approx 20{,}19$.

Якщо враховувати внутрішню в'язкість на основі лінійної моделі Кельвіна–Фойгта, то критичне значення p^* буде залежати від коефіцієнта в'язкості k. Для задачі 1 в [2] отримано значення p^*в околі значення $k = 0$: $\lim\limits_{k\to 0} p^*(k) = 10{,}94$, що майже в два рази менше за $p^* \approx 20{,}05$. Описане явище відоме в літературі по динамічній стійкості як «парадокс Циглера». Причинам та поясненню цього «парадоксу», а також випадкам стабілізації малою лінійною дисипацією присвячений докладний огляд [4–7].

В даній роботі цікавить визначення критичного навантаження p^* як функції коефіцієнта в'язкості k. Зокрема, важливо існування наявності стрибка

в зазначених задачах при зникаюче малому значенні коефіцієнта в'язкості. Розв'язок задач представлений у вигляді ряду за балочними функціями.

Метод розв'язання. Розв'язок задач I, II представимо у вигляді відрізку ряду:

$$W(\xi,\tau)=\sum_{i=1}^{N} T_i(\tau)\cdot X_i(\xi), \tag{9}$$

де N – кінцева кількість доданків розкладу, що підлягає подальшому дослідженню; $X_i(\xi)$ – лінійні комбінації балочних функцій $S_j(\delta_i\xi)$ $(j=\overline{1,4})$:

$$X_i(\xi)=X_i(0)\cdot S_1(\delta_i\xi)+X_i'(0)\cdot S_2(\delta_i\xi)+X_i''(0)\cdot S_3(\delta_i\xi)+X_i'''(0)S_4(\delta_i\xi);$$
$$S_1(\delta_i\xi)=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}(\delta_i\xi)+\cos(\delta_i\xi));\ \ S_2(\delta_i\xi)=\frac{1}{2}(\mathrm{sh}(\delta_i\xi)+\sin(\delta_i\xi));$$
$$S_3(\delta_i\xi)=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}(\delta_i\xi)-\cos(\delta_i\xi));\ \ S_4(\delta_i\xi)=\frac{1}{2}(\mathrm{sh}(\delta_i\xi)-\sin(\delta_i\xi)),$$

де δ_i – сталі, що підлягають визначенню.

Розрахункові формули задачі I. Підстановка (9) в граничні умови (6) призводить до такого вигляду функцій $X_i(\xi)$:

$$X_i(\xi)=-\frac{S_2(\delta_i)}{S_1(\delta_i)}\cdot S_3(\delta_i\cdot\xi)+S_4(\delta_i\cdot\xi), \tag{10}$$

де δ_i – розв'язки рівняння:

$$\mathrm{ch}(\delta_i)\cdot\cos(\delta_i)=-1;\ \ (i=\overline{1,N}). \tag{11}$$

Перші чотири наближені значення коренів рівняння (11):

$$\delta_1\approx 1{,}87510;\ \delta_2\approx 4{,}69409;\ \delta_3\approx 7{,}85475;\ \delta_4\approx 10{,}9955. \tag{12}$$

Складемо диференціальне рівняння, якому задовольняють функції $T_i(\tau)$ розкладу (9). Підставимо (9) в рівняння (5). Надалі почергово помножимо отриманий вираз на $X_j(\xi)$ $(j=\overline{1,N})$ та інтегруємо отримані співвідношення по змінній ξ по відрізку від 0 до 1.

Із врахуванням властивостей балочних функцій:

$$\frac{d^4X_i(\xi)}{d\xi^4}=\delta_i^4\cdot X_i(\xi);$$
$$\int_0^1 X_i(\xi)\cdot X_j(\xi)\ d\xi=0,\ \ (i\neq j),$$

приходимо до замкненої системи N лінійних однорідних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $T_i(\tau)$ $(i=\overline{1,N})$:

$$\frac{d^2T_i(\tau)}{d\tau^2}+k\cdot\delta_i^4\cdot\frac{dT_i(\tau)}{d\tau}+\delta_i^4\cdot T_i(\tau)+p\cdot\sum_{j=1}^{N}d_{i,j}\,T_j(\tau)=0, \tag{13}$$

де $d_{i,j}$ – сталі величини, означені співвідношенням:

$$d_{i,j} = \frac{\int_0^1 \mathrm{X}_i(\xi) \cdot \frac{d^2 \mathrm{X}_j(\xi)}{d\xi^2}\, d\xi}{\int_0^1 \mathrm{X}_i^2(\xi)\, d\xi}. \quad (14)$$

Розрахункові формули задачі II. Аналогічні обчислення для задачі II приводять до таких результатів:

$$\mathrm{X}_i(\xi) = -\frac{\mathrm{S}_3(\delta_i)}{S_2(\delta_i)} \cdot \mathrm{S}_1(\delta_i \cdot \xi) + \mathrm{S}_2(\delta_i \cdot \xi), \quad (15)$$

де δ_i – розв'язки трансцендентного рівняння:

$$\mathrm{ch}\,(\delta_i) \cdot \cos(\delta_i) = 1;\ (i = \overline{1,N}). \quad (16)$$

Перші чотири наближені значення коренів рівняння (16) такі:

$$\delta_1 \approx 4{,}73004;\ \ \delta_2 \approx 7{,}85320;\ \ \delta_3 \approx 10{,}9956;\ \ \delta_4 \approx 14{,}1372. \quad (17)$$

Функції $T_i(\tau)$ розкладу (9) задовольняють ДР (13), де

$$d_{i,j} = \frac{\int_0^1 (1-\xi) \cdot \mathrm{X}_i(\xi) \cdot \frac{d^2 \mathrm{X}_j(\xi)}{d\xi^2}\, d\xi - \int_0^1 \mathrm{X}_i(\xi) \cdot \frac{d\mathrm{X}_j(\xi)}{d\xi}\, d\xi}{\int_0^1 \mathrm{X}_i^2(\xi)\, d\xi}. \quad (18)$$

Розв'язок рівняння (13) шукаємо у вигляді $\mathrm{T}_i(\tau) = e^{\omega\tau}$, відповідне характеристичне рівняння для довільного значення N має вигляд:

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 & pd_{1,2} & pd_{1,3} & pd_{1,4} & \dots & pd_{1,N} \\ pd_{2,1} & \Omega_2 & pd_{2,3} & pd_{2,4} & \dots & pd_{2,N} \\ pd_{3,1} & pd_{3,2} & \Omega_3 & pd_{3,4} & \dots & pd_{3,N} \\ pd_{4,1} & pd_{4,2} & pd_{4,3} & \Omega_4 & \dots & pd_{4,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ pd_{N,1} & pd_{N,2} & pd_{N,3} & pd_{N,4} & \dots & \Omega_N \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

де $\Omega_i = \omega^2 + k \cdot \delta_i^4 \cdot \omega + \delta_i^4 + pd_{i,i}$. В задачі I значення δ_i, $d_{i,j}$ визначено формулами (12), (14), в задачі II – відповідно формулами (17), (18).

Тривіальний розв'язок рівняння (13) буде стійким, якщо усі корені ω рівняння (19) мають від'ємні дійсні частини.

Результати

Пружній стрижень. Розглянемо питання щодо доцільної кількості доданків N в розкладі (9). Покладемо коефіцієнт внутрішньої в'язкості $k = 0$. Визначимо значення критичного навантаження p^*, при якому розв'язок системи диференціальних рівнянь (13) буде стійким для різної кількості доданків N розкладу (9).

Для довільного N характеристичне рівняння (19) можна представити у вигляді:

$$y^N + b_1(p) \cdot y^{N-1} + \dots + b_N(p) = 0, \quad (20)$$

де $y = \omega^2$; $b_i(p)$ $(i = \overline{1,N})$ – означені поліноми i-го порядку відносно параметру p. Корені рівняння (19) будуть мати від'ємні дійсні частини, якщо рівняння (20) має дійсні від'ємні корені.

Із застосуванням критерію Раусса–Гурвіца для різної кількості N доданків розкладу (9) аналітично отримано значення критичного навантаження p^*. Результати наведено в таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення критичного навантаження p^* для довільного N при $k = 0$

N	p^*. Задача I	p^*. Задача II
2	20,105	116,10
3	20,113	109,98
4	20,113	109,98

Оскільки в обох задачах $p^*|_{N=3} \approx p^*|_{N=4}$, в розладі (9) достатньо обмежитися лише трьома доданками. Зауважимо, що наведені значення $p^*|_{N=3}$ збігаються із зазначеними в літературі [1–3].

В'язкопружній стрижень. При $N = 3,\ k > 0$ характеристичне рівняння (19) системи (13) приводиться до виду:

$$\omega^6 + b_1(k,p)\omega^5 + b_2(k,p)\omega^4 + b_3(k,p)\omega^3 + b_4(k,p)\omega^2 + \\ + b_5(k,p)\omega + b_6(k,p) = 0, \qquad (21)$$

де $b_i(k,p)$ $(i = \overline{1,6})$ – визначені функції.

Для фіксованого значення k за критерієм Раусса–Гурвіца можна визначити значення критичного навантаження p^* (таблиця 2) згідно розв'язку системи нерівностей: $\triangle_i > 0$ $\left(i = \overline{2,6}\right)$, $\triangle_i$ – головні діагональні визначники матриці Гурвіца.

Таблиця 2 – Значення критичного навантаження p^* при заданому значенні k

k	p^* Задача I	p^* Задача II
10^{-10}	10, 9177	88,2131
10^{-3}	10,9180	88,2326
10^{-2}	10,9448	89,9509

Отже, існування будь-якого малого значення коефіцієнта внутрішньої в'язкості призводить до суттєвого зменшення критичного навантаження у порівняння з пружною моделлю. Описане явище відоме в літературі як «парадокс Циглера».

Загалом в задачах I, II залежність $p^* = p^*(k)$ в околі $k = 0$ можна апроксимувати параболою, що показано на рис. 5.

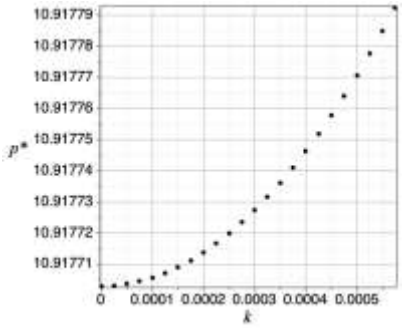


Рис. 5 – Задача I.
Залежність $p^* = p^*(k)$, $k \approx 0$

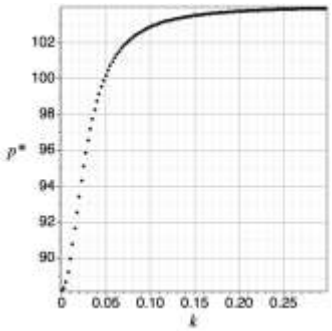


Рис. 6 – Задача II.
Залежність $p^* = p^*(k)$

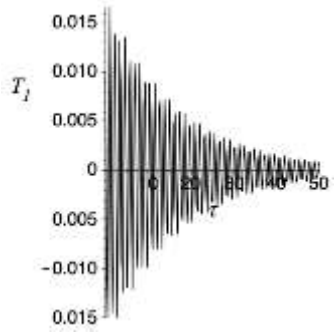


Рис. 7 – Задача I. Графік $\mathrm{T}_1(\tau)$ при $k = 0{,}1;\ p = 13$

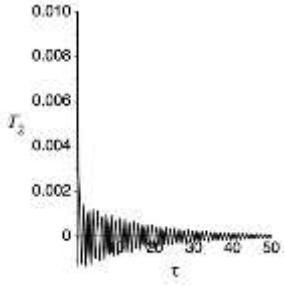


Рис. 8 – Задача I. Графік $\mathrm{T}_2(\tau)$при $k = 0{,}1;\ p = 13$

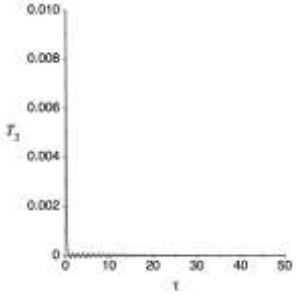


Рис. 9 – Задача I. Графік $\mathrm{T}_3(\tau)$ при $k = 0{,}1;\ p = 13$

В задачі II доведено [8], що існування будь-якого ненульового значення k призводить до зниження границі стійкості на кінцеву величину. На рис. 6 зображена поведінка функції $p^*(k)$ для довільного k. При $k > 0{,}25$ $\mathrm{p}^*(k) \approx 103{,}83$, що менше за $\mathrm{p}^*(0) \approx 109{,}98$.

Чисельні дослідження. Наведені аналітичні результати задач I, II підтверджуються чисельними. Методом Рунге–Кутта 8 порядку отримано розв'язок системи диференціальних рівнянь (13) при довільних початкових умовах:

$$\mathrm{T}_1(0) = \mathrm{T}_2(0) = \mathrm{T}_3(0) = \mathrm{T}_1'(0) = \mathrm{T}_2'(0) = 0{,}01;\ \mathrm{T}_3'(0) = -0{,}01. \qquad (22)$$

Так, наприклад, в задачі I для $k = 0{,}1$ значення критичного навантаження становить $p^*|_{k=0{,}1} \approx 13{,}6$. На рис. 7 – 9 зображені функцій $\mathrm{T}_i(\tau)$ $(i = \overline{1{,}3})$ при значенні навантаження $p < p^*|_{k=0{,}1}$, що відповідає умові стійкості руху.

На рис. 10 – 12 наводяться аналогічні графіки при заданому навантаженні $p > p^*|_{k=0{,}1}$.

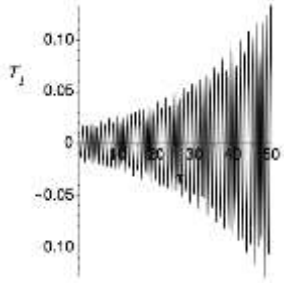


Рис. 10 – Задача I. Графік $\mathrm{T}_1(\tau)$ при $k = 0{,}1; p = 14$

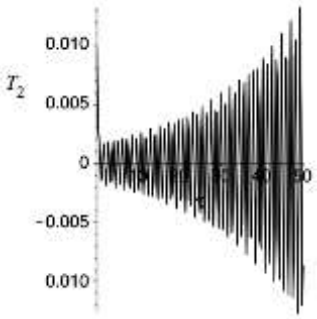


Рис. 11 – Задача I. Графік $\mathrm{T}_2(\tau)$ при $k = 0{,}1;\ p = 14$

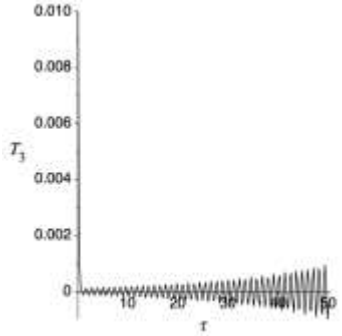


Рис. 12 – Задача I. Графік $\mathrm{T}_3(\tau)$ при $k = 0{,}1; p = 14$

Аналогічні чисельні обчислення отримано і для задачі II [8]. Доведено, що зміна початкових умов (22) не впливає на якісну поведінку функцій $\mathrm{T}_i(\tau)$ $(i = \overline{1{,}3})$.

Висновки. Розв'язані задачі про стійкість руху в'язкопружного стрижня під дією сили, що стежить. Результати дослідження полягають у такому.

1. Отримано математичну постановку наведених задач.

2. Розв’язок задач представлено у вигляді кінцевого ряду за балочними функціями. Аналітично встановлено, що найменша кількість членів ряду, що описує розв’язок задачі, становить $N = 3$.

3. Отримано залежність критичного навантаження p^* від коефіцієнта внутрішньої в'язкості k.

4. Підтверджено парадокс дестабілізації: при будь-якому малому значенні коефіцієнта внутрішньої в'язкості $k \to 0, k \neq 0$ значення критичного навантаження суттєво падає: $p^*|_{k\to 0} \ll p^*|_{k=0}$.

5. Представлені аналітичні результати підтверджено чисельними дослідженнями.

Задачі є цікавими з прикладної точки зору, оскільки їх можна вважати спрощеною моделлю ракети, що рухається під дією реактивної сили. Визначення критичного навантаження – визначення втрати стійкості конструкції, при якій прямолінійні елементи вигинаються, викручуються або деформуються любим іншим способом, є одним із найважливіших питань, що розглядаються в механіці. В роботі запропоновано алгоритм розв’язку прикладних задач теорії стійкості із застосуванням балочних функцій, що дозволяє виділити особливості поведінки системи при зміні параметрів задачі.

1. *Bolotin V. V., Zhinzher N. I.* Effects of damping on elastic system subjiected to nonconservative forces. Int. J. Solids and Struct. 1969. № 9. P. 965–989. https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90082-1
2. *Beck M.* Die Knicklast des einseiting eingespannten tangential gedrückten Stabes. Z. Angew. Math. Und Phys. 1952. 3, № 3. P. 225–228. https://doi.org/10.1007/BF02008828
3. *Pflüger A.* Zur Stabilität des tangential gedrückten Stabes. Z. Angew. Math. und Mech. 1955. 35, № 5. 191 p. https://doi.org/10.1002/zamm.19550350506
4. *Baikov A. E., Krasil'nikov P. S.* The Zigler effect in non-conservative mechanical system. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. 74(1). P. 51–60. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.03.005
5. *Luongo A., Ferretti M., D'Annibale F.* Paradoxes in dynamic stability of mechanical systems: investigating the causes and detecting the nonlinear behaviors. Springerplus. 2016. https://doi.org/10.1186/s40064-016-1684-9
6. *Bolotin V. V.* Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. The Journal of the Royal Aeronautical Society. 1964. V. 68. Iss. 642. P. 423–424. https://doi.org/10.1017/S0368393100079682
7. *Zhuravkov M., Lyu Y., Starovoitov E.* Mechanics of Solid Deformable Body. Springer Nature Singapore //Textbook ISBN 978-981-19-8410-5. 2023. Editon 1, XV. 308 p. https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5
8. *Kostyushko I., Shapovalov H.* Study of motion stability of a viscoelastic rod. Mech. Adv. Technol. 2024. V. 8, No. 1. P. 80–86. https://doi.org/10.20535/2521-1943.2024.8.1(100).297514

Отримано 04.03.2025,
в остаточному варіанті 24.03.2025